Integration der Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$ *

Leonhard Euler

§1 Mit einer überaus einzigartigen und unkonventionellen Methode war ich einst zur Integration dieser Gleichung gelangt, deren Integral und sogar das vollständige ich entdeckt habe in einer algebraischen Gleichung zwischen x und y enthalten zu sein. Das scheint umso merkwürdiger, weil das Integral jeder der beiden Formeln einzeln nicht nur nicht algebraisch, sondern nicht einmal durch die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel ausgedrückt werden kann. Dann tauchte aber das besonders bemerkenswerte Phänomen auf, dass keine direkte Methode offenstand, dieses algebraische Integral zu finden. Aber keine Gelegenheit scheint momentan geeigneter, die Grenzen der Analysis zu erweitern, als wenn wir uns darum bemühen, dasselbe, was wir mit einer unkonventionellen Methode durch viele Umwege hindurch gefunden haben, mit einer direkten Methode ausfindig zu machen. Weil ich also neulich Kurven bestimmt habe, welche ein zu zwei festen Kraftzentren hingezogener Körper durchläuft, und sie auf eine ähnliche Gleichung zurückgeführt habe, wird es umgekehrt möglich sein, daher die Integration dieser Gleichung zu entnehmen; wie das zu leisten ist, habe ich beschlossen, hier zu erklären.

*Originaltitel: "Integratio Aequationis $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 12* 1768, pp. 3-16", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 20, pp. 302 - 317 ", Eneström-Nummer E345, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§2 Und zuerst bemerke ich freilich, dass die vorgelegte Gleichung immer in eine Form solcher Art überführt werden kann, in welcher die Koeffizienten B und D verschwinden, was freilich über den einen einen der beiden aus den Elementen hinreichend bekannt ist. Dass aber beide zugleich zu Null gemacht werden können, das ist einer solchen Form zu eigen; denn die erste Form, welcher die andere freilich gleich ist, geht nach Setzen von $x = \frac{mz+a}{nz+b}$ in diese über

$$\frac{(mb-na)dz}{\sqrt{A(nz+b)^4+B(nz+b)^3(mz+a)+C(nz+b)^2(mz+a)^2+D(nz+b)(mz+a)^3+E(mz+a)^4}},$$

in deren Nenner sich die so die mit der Größe z selbst wie mit ihrem Kubus z^3 behafteten Terme aufheben lassen. Die erste Bedingung liefert diese Gleichung

$$4Anb^3+Bmb^3+3Bnabb+2Cmabb+2Cnaab+3Dmaab+Dna^3+4Ema^3=0,$$

die zweite hingegen diese

$$4An^3b+Bn^3a+3Bmnnb+2Cmnna+2Cmmb+3Dmmna+Dm^3b+4Em^3a=0,$$

woher so das Verhältnis $a:b$ wie das Verhältnis $m:n$ gefunden werden kann.

§3 Wir wollen nämlich $a=bp$ und $m=nq$ setzen, dass wir diese Gleichungen haben

$$\begin{aligned}4A+Bq+3Bp+2Cpq+2Cpp+3Dppq+Dp^3+4Ep^3q&=0,\\4A+Bp+3Bq+2Cpq+2Cqq+3Dpqq+Dq^3+4Epq^3&=0,\end{aligned}$$

deren Differenz durch $p-q$ dividiert liefert

$$2B+2C(p+q)+D(pp+4pq+qq)+4Epq(p+q)=0.$$

Dann gibt aber die erste mit q multipliziert von der zweiten mit p multipliziert weggenommen, nachdem durch $p-q$ dividiert worden ist,

$$-4A-B(p+q)+Dpq(p+q)+4Eppqq=0;$$

wir wollen nun $p+q=r$ und $pq=s$ setzen und aus den Gleichungen

$$2B + 2Cr + Drr + 2Ds + 4Ers = 0,$$

$$-4A - Br + Drs + 4Ess = 0$$

erlangen wir durch Finden von $r = \frac{4(A-Ess)}{Ds-B}$ diese kubische Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} +D^3 \\ -4CDE \\ +8BEE \end{array}\right\} s^3 \quad \left.\begin{array}{l} -BDD \\ +4BCE \\ -8ADE \end{array}\right\} s^2 \quad \left.\begin{array}{l} -BBD \\ +4ACD \\ -8ABE \end{array}\right\} s \quad \left.\begin{array}{l} +B^3 \\ -4ABC \\ +8AAD \end{array}\right\} = 0$$

woher die Unbekannte s definiert wird, was also auf drei Weisen geschehen können wird.

§4 Weil sich die Koeffizienten B und D also ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Null gleich annehmen lassen, besteht unsere Frage im Finden des Integrals dieser Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cxx + Dx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + Cyy + Ey^4}},$$

welche wir auf diese Weise darstellen wollen

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{A + Cxx + Ex^4}{A + Cyy + Dy^4}},$$

woher allgemein eine Relation zwischen den Variablen x und y gefunden werden muss, was ich auf die folgende Weise zu leisten versuchen werde.

§5 Wir wollen zuerst $x = \sqrt{npq}$ und $y = \sqrt{n\frac{p}{q}}$ setzen; es wird sein

$$dx = \frac{\sqrt{n(qdp + pdq)}}{2\sqrt{pq}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{\sqrt{n(qdp - pdq}}{2q\sqrt{pq}}$$

und daher

$$\frac{dx}{dy} = \frac{q(qdp + pdq)}{qdp - pdq}.$$

Weiter ist aber

$$\frac{A + Cxx + Dx^4}{A + Cyy + Dy^4} = \frac{qq(A + nCpq + nnDppqq)}{Aqq + nCpq + nnDpp},$$

woher wird

$$\frac{qdp+pdq}{qdp-pdq}=\sqrt{\frac{A+nCpq+nnDppqq}{Aqq+nCpq+nnDpp}},$$

wo nun die Zahl n zu unserem Vorteil angenommen werden kann.

§6 Es sei der Kürze wegen

$$\frac{A+nCpq+nnDppqq}{Aqq+nCpq+nnDpp}=\frac{P+Q}{P-Q};$$

es wird sein

$$\frac{P}{Q}=\frac{A(1+qq)+2nCpq+nnDpp(1+qq)}{A(1-qq)-nnDpp(1-qq)}=\frac{(A+nnDpp)(1+qq)+2nCpq}{A-nnDpp)(1-qq)}.$$

Dann werden wir aber wegen

$$\frac{qdp+pdq}{qdp-pdq}=\sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}}$$

erhalten

$$\frac{qdp}{pdq}=\frac{\sqrt{P+Q}+\sqrt{P-Q}}{\sqrt{P+Q}-\sqrt{P-Q}}=\frac{P+\sqrt{PP-QQ}}{Q}$$

und

$$\frac{pdq}{qdp}=\frac{P-\sqrt{PP-QQ}}{Q}.$$

§7 Die ganze Prinzip besteht nun aus einer geeigneten Substitution; und ich habe freilich bemerkt, dass diese zu gebrauchen ist

$$q=u+\sqrt{uu-1},\quad \text{woher wird}\quad \frac{dq}{q}=\frac{du}{\sqrt{uu-1}}$$

und weiter

$$1+qq=2qu,\quad 1-qq=-2q\sqrt{uu-1},$$

woher dann berechnet wird

$$\frac{P}{Q} = \frac{(A+nnDpp)+nCp}{(nnDpp-A)\sqrt{uu-1}},$$

und nun ist es freilich ersichtlich, dass es am vorteilhaftesten ist, für n die Einheit anzunehmen. Weil also ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{(A+Dpp)u+Cp}{(Dpp-A)\sqrt{uu-1}},$$

wird sein

$$\frac{\sqrt{PP-QQ}}{Q} = \frac{\sqrt{4ADppuu+2Cp(A+Dpp)u+CCpp+(Dpp-A)}}{(Dpp-A)\sqrt{uu-1}},$$

so dass dass unsere zu integrierende Gleichung diese ist

$$\frac{pdu}{dp} = \frac{(A+Dpp)u+Cp-\sqrt{4ADppuu+2Cpu(A+Dpp)+CCpp+(Dpp-A)^2}}{Dpp-A}.$$

§8 Diese irrationale Formel werde auf diese Weise dargestellt

$$\sqrt{\left(2pu\sqrt{AD}+\frac{C(A+Dpp)}{2\sqrt{AD}}\right)^2+\frac{(4Ad-CC)(Dpp-A)^2}{4AD}}$$

und es werde festgelegt

$$2pu\sqrt{AD}+\frac{C(A+Dpp)}{2\sqrt{AD}} = \frac{(Dpp-A)s\sqrt{4AD-CC}}{2\sqrt{AD}},$$

woher die surdische Formel selbst wird

$$= \frac{(Dpp-A)\sqrt{4AD-CC)(1+ss)}}{2\sqrt{AD}}$$

und

$$u = -\frac{C(A+Dpp)}{4ADp}+\frac{(Dpp-A)s\sqrt{4AD-CC}}{4ADp}$$

und daher

$$(A+Dpp)u+Cp=\frac{-C(Dpp-A)^2+(A+Dpp)(Dpp-A)s\sqrt{4AD-CC}}{4ADp},$$

so dass unsere Gleichung nun diese ist

$$\frac{pdu}{dp}=\frac{-C(Dpp-A)+(A+Dpp)s\sqrt{4AD-CC}}{4ADp}-\frac{\sqrt{4AD-CC)(1+ss)}}{2\sqrt{AD}}.$$

§9 Daher erschließen wir aber

$$du=-\frac{-Cdp(Dpp-A)}{4ADpp}+\frac{sdp(A+Dpp)\sqrt{4AD-CC}}{4Adpp}+\frac{ds(Dpp-A)\sqrt{4AD-CC}}{4ADp},$$

so dass wir erhalten

$$\frac{pdu}{dp}=\frac{-C(Dpp-A)}{4ADp}+\frac{s(A+Dpp)\sqrt{4AD-CC}}{4ADp}+\frac{ds(Dpp-A)\sqrt{4AD-CC}}{4ADdp},$$

nachdem welche Formel der vorhergehenden gleich gesetzt worden ist, passiert es in überaus angenehmer Weise, dass die meisten Terme sich von selbst aufheben und daher diese Gleichung entspringt

$$\frac{ds(Dpp-A)\sqrt{4AD-CC}}{4ADdp}=\frac{-\sqrt{(4AD-CC)(1+ss)}}{2\sqrt{AD}},$$

woher entsprießt

$$\frac{ds}{\sqrt{1+ss}}=\frac{-2dp\sqrt{AD}}{Dpp-A}=\frac{2dp\sqrt{AD}}{A-Dpp},$$

deren Integral in Logarithmen dieses ist

$$\log(s+\sqrt{1+ss})=\log\frac{\sqrt{A}+p\sqrt{D}}{\sqrt{A}-p\sqrt{D}}+\log\alpha,$$

so dass wir haben

$$s+\sqrt{1+ss}=\frac{\alpha\sqrt{A}+\alpha p\sqrt{D}}{\sqrt{A}-p\sqrt{D}}$$

und daher

$$s = \frac{\alpha\alpha(\sqrt{A} + p\sqrt{D})^2 - (\sqrt{A} - p\sqrt{D})^2}{2\alpha(A - Dpp)}.$$

§10 Wenn wir nun dazu zurückkehren

$$u = -\frac{-C(A + Dpp)}{4ADp} + \frac{(\sqrt{A} - p\sqrt{D})^2 - \alpha\alpha(\sqrt{A} + p\sqrt{D})^2}{8\alpha ADp}\sqrt{4AD - CC},$$

woher $q = u + \sqrt{uu - 1}$ definiert werden muss. Aber weil daher $u = \frac{1+qq}{2q}$ wird, indem wieder $p = xy$ und $q = \frac{x}{y}$ eingesetzt wird, ist unsere vollständige Integralgleichung diese

$$\frac{xx + yy}{2xy} = \frac{-C(A + Dxxyy)}{4ADxy} + \frac{(\sqrt{A} - xy\sqrt{D})^2 - \alpha\alpha(\sqrt{A} + xy\sqrt{D})^2}{8\alpha ADxy}\sqrt{4AD - CC}$$

oder

$$\begin{aligned} &4AD(xx + yy) + 2C(A + Dxxyy) \\ &= \frac{\sqrt{4AD - CC}}{\alpha}(\sqrt{A} - xy\sqrt{D})^2 - \alpha\alpha(\sqrt{A} + xy\sqrt{D})^2, \end{aligned}$$

welche in diese entwickelt wird

$$\frac{4AD(xx + yy) + 2C(A + Dxxyy)}{\sqrt{4AD - CC}} = \frac{(1 - \alpha\alpha)A - 2(1 + \alpha\alpha)xy\sqrt{AD} + (1 - \alpha\alpha)Dxxyy}{\alpha},$$

und durch Setzen von

$$\alpha = \frac{\sqrt{4AD - CC}}{mC}$$

geht dann hervor

$$\begin{aligned} &4AD(xx + yy) + 2C(A + Dxxyy) \\ &= \frac{((1 + mm)CC - 4AD)(A + Dxxyy) - 2((mm - 1)CC + 4AD)CC + 4AD)xy\sqrt{AD}}{mC}. \end{aligned}$$

§11 Aber damit die Fälle, wo $\sqrt{AD}$ eine imaginäre Größe wird, nicht stören, wird es förderlich sein, die Integration auf einem anderen Wege, der auf die in § 9 bemerkte Aufhebung der Terme selbst gestützt ist, ausfindig zu machen. Natürlich werde nach Festlegen der Gleichung

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{A + Cxx + Ex^4}{A + Byy + Ey^4}}$$

$x = \sqrt{pq}$ und $y = \sqrt{\frac{p}{q}}$, dass daher erhalten wird

$$\frac{pdq}{qdp} = \frac{P - \sqrt{PP - QQ}}{Q},$$

wobei ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{(A + Epp)(1 + qq) + 2Cpq}{(A - Epp)(1 - qq)}.$$

Es werde nun $q = u + \sqrt{uu - 1}$ gesetzt, dass ist

$$1 + qq = 2qu, \quad 1 - qq = 2qu - 2qq = -2q\sqrt{uu - 1};$$

es wird sein

$$\frac{dq}{q} = \frac{du}{\sqrt{uu - 1}} \quad \text{und} \quad \frac{P}{Q} = \frac{u(A + Epp) + Cp}{(Epp - A)\sqrt{uu - 1}},$$

woher diese transformierte Gleichung resultiert

$$\frac{pdu}{dp} = \frac{u(A + Epp) + Cp - \sqrt{4AEppuu + 2Cpu(A + Epp) + CCpp + (Epp - A)^2}}{Epp - A}.$$

§12 Nach Ordnen dieser Gleichung und nachdem das irrationale Glied der Kürze wegen $= \sqrt{M}$ gesetzt worden ist, wird werden

$$udp(A + Epp) + Cpdp - pdu(Epp - A) = dp\sqrt{M}$$

und nachdem zuerst das irrationale Glied verworfen worden ist, wird das Integral aufgefunden werden als

$$\frac{C - 2Epu}{Epp - A} = \text{Konst.};$$

anstelle der Konstante werde aber die Variable Größe s angenommen, dass ist

$$2Epu + C = s(Epp - A) \quad \text{und} \quad u = \frac{s(Epp - A) - C}{2Ep},$$

und daher wird das rationale Glied

$$\frac{-ds(Epp - A)^2}{2E}$$

und die irrationale Formel

$$(Epp - A)\sqrt{\frac{Ass + Cs + E}{E}},$$

so dass nun ist

$$\frac{ds}{2}(Epp - A) = dp\sqrt{E(Ass + Cs + E)}$$

oder

$$\frac{ds}{\sqrt{E(Ass + Cs + E)}} + \frac{2dp}{Epp - A} = 0,$$

deren Integral dieses ist

$$\frac{1}{\sqrt{AE}} \log \frac{p\sqrt{E} - \sqrt{A}}{p\sqrt{E} + \sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{AE}} \log \left(As + \frac{1}{2}C + \sqrt{A(Ass + Cs + E)} \right) = \text{Konst.}$$

§13 Diese Gleichung geht also auf diese Form zurück

$$As + \frac{1}{2}C + \sqrt{A(Ass + Cs + E)} = \alpha \frac{p\sqrt{E} + \sqrt{A}}{p\sqrt{E} - \sqrt{A}} = T,$$

woher gefunden wird

$$AE = TT - T(2As + C) + \frac{1}{4}CC$$

oder

$$2As + C = \frac{TT + \frac{1}{4}CC - AE}{T} = \frac{\alpha\alpha(p\sqrt{E} + \sqrt{A})^2 + (\frac{1}{4}CC - AE)(p\sqrt{E} - \sqrt{A})^2}{\alpha(Epp - A)}.$$

Weil nun $p = xy$ und $q = \frac{x}{y}$ ist, wird sein

$$u = \frac{xx + yy}{2xy} \quad \text{und} \quad s = \frac{E(xx + yy) + C}{Exxyy - A},$$

woher erhalten wird

$$\frac{2AE(xx + yy) + CExxyy + AC}{Exxyy - A} = T + \frac{CC - 4AE}{4T},$$

während ist

$$T = \alpha \cdot \frac{xy\sqrt{E} + \sqrt{A}}{xy\sqrt{E} - \sqrt{A}} = \alpha \cdot \frac{Exxyy + A + 2xy\sqrt{AE}}{Exxyy - A}$$

und

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{Exxyy + A - 2xy\sqrt{AE}}{Exxyy - A}$$

und daher

$$\begin{aligned} 2AE(xx + yy) + CExxyy + AC &= \alpha(Exxyy + A) + 2\alpha xy\sqrt{AE} \\ &+ \frac{CC - 4AE}{4\alpha}(Exxyy + A) - \frac{2(CC - 4AE)}{4\alpha} xy\sqrt{AE}. \end{aligned}$$

§14 Damit aber dieser Ausdruck keine imaginären Größen involviert, wollen wir die Form der Konstante α so anzeigen, dass ist

$$\alpha + \frac{CC - 4AE}{4\alpha} = F \quad \text{oder} \quad 4\alpha\alpha = 4\alpha F - CC + 4AE$$

und daher

$$2\alpha = F + \sqrt{FF + 4AE - CC} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\alpha} = \frac{F - \sqrt{FF + 4AE - CC}}{CC - 4AE},$$

woher wird

$$2\alpha - \frac{CC - 4AE}{2\alpha} = 2\sqrt{FF + 4AE - CC}$$

und

$$2AE(xx+yy) = (F-C)(Exxyy+A) + 2xy\sqrt{AE(FF+4AE-CC)};$$

es sei nun $f-C=2G$; es wird sein

$$AE(xx+yy) = G(A+Exxyy) + 2xy\sqrt{AE(AE+CG+GG)},$$

welches die vollständige Integralgleichung dieser Differentialgleichung ist

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cxx+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+Cyy+Ey^4}},$$

wo die Konstante G so angenommen werden muss, dass die irrationale Formel

$$\sqrt{AE(AE+CG+GG)}$$

nicht imaginär wird.

§15 Aber diese Integralformel kann noch weiter vereinfacht werden, indem $G = Eff$ gesetzt wird, und so wird die Integralgleichung werden

$$A(xx+yy) = ff(A+Exxyy) + 2xy\sqrt{A(A+Cff+Ef^4)},$$

wo f eine beliebige Konstante ist. Daher wird aber gefunden

$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Cff+Ef^4)} \pm f\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Effxx}$$

und auf die gleiche Weise

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Cff+Ef^4)} \pm f\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Effyy}.$$

Diese Formeln stimmen mit denen, welche ich einst angegeben hatte, vollkommen überein.

§16 Ich habe das Integral der vorgelegten Differentialgleichung hier freilich mit einer direkten Methode erlangt, aber dennoch kann ich nicht abstreiten, dass dies über viele Umwege geleistet worden ist, so dass es kaum zu erwarten ist, dass jemandem diese Operationen in den Sinn kommen konnte. Daher scheint auch die Methode selbst, die ich hier gebraucht habe, noch sehr vielversprechend zu sein und es besteht kein Zweifel, dass, indem sie sorgfältiger untersucht wird, ein Zugang zu vielen anderen wunderschönen Dingen eröffnet wird und unter Umständen eine andere Methode, dasselbe zu leisten entdeckt wird, woher nicht zu verachtende Hilfsmittel, um die Analysis weiter zu vervollkommen, geschöft werden können.

§17 Die hier verwendeten Operationen können ein wenig variiert werden, was nicht frei von Nutzen sein wird, es sittsam und eingehend betrachtet zu haben. Ich stelle natürlich die vorgelegte Differentialgleichung so dar

$$\frac{ydx}{xdy} = \sqrt{\frac{Ayy + Cxxyy + Ex^4yy}{Axx + Cxxyy + Exxy^4}} = \sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}},$$

dass ist

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{\frac{(A + Exxyy)(xx+yy) + 2Cxxyy}{(A - Exxyy)(yy-xx)}},$$

und es wird sein

$$\frac{ydx + xdy}{ydx - xdy} = \frac{\sqrt{P+Q} + \sqrt{P-Q}}{\sqrt{P+Q} - \sqrt{P-Q}} = \frac{P + \sqrt{PP - QQ}}{Q},$$

dann auch

$$\frac{ydx - xdy}{ydx + xdy} = \frac{P - \sqrt{PP - QQ}}{Q}.$$

Wir wollen nun diese Substitution durchführen

$$x = p\left(\sqrt{\frac{q+1}{2}} - \sqrt{\frac{q-1}{2}}\right) \quad \text{und} \quad y = p\left(\sqrt{\frac{q+1}{2}} + \sqrt{\frac{q-1}{2}}\right);$$

es wird sein

$$xy = pp, \quad xx + yy = 2ppq, \quad yy - xx = 2pp\sqrt{qq-1},$$

darauf

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{2\sqrt{qq-1}} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{2\sqrt{qq-1}};$$

daher wird

$$\frac{ydx}{xdy} = \frac{\frac{dp}{p} - \frac{dq}{2\sqrt{qq-1}}}{\frac{dp}{p} + \frac{dq}{2\sqrt{qq-q}}} \quad \text{und} \quad \frac{ydx - xdy}{ydx + xdy} = \frac{-pdq}{2dp\sqrt{qq-1}}$$

sowie

$$\frac{P}{Q} = \frac{2(A+Ep^4)ppq + 2Cp^4}{2(A-Ep^4)pp\sqrt{qq-1}} = \frac{(A+Ep^4)q + Cpp}{(A-Ep^4)\sqrt{qq-1}},$$

woher wird

$$\frac{\sqrt{PP-QQ}}{Q} = \frac{\sqrt{4AEp^4qq + 2Cppq(A+Ep^4) + CCp^4 + (A-Ep^4)^2}}{(A-Ep^4)\sqrt{qq-1}}.$$

§18 Es sei $pp = r$ und es wird wegen $\frac{dp}{p} = \frac{dr}{2r}$ sein

$$0 = \frac{rdq}{dr} + \frac{(A+Err)q + Cr - \sqrt{4AErrqq + 2Crq(A+Err) + CCrr + (A-Err)^2)}}{A-Err}$$

oder

$$\begin{aligned} &rdq(A-Err) + qdr(A+Err) + Crdr \\ &= dr\sqrt{4AErrqq + 2Crq(A+Err) + CCrr + (A-Err)^2}. \end{aligned}$$

Die Größe unter der Wurzel werde so dargeboten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4AE}(16AAEErrqq + 8ACErq(A+Err) + 4ACCErr + 4AE(A-Err)^2) \\ &= \frac{1}{4AE}((4AErq + C(A+Err))^2 + (4AE-CC)(A-Err)^2). \end{aligned}$$

Wir wollen also festlegen

$$4AErq + C(A+Err) = s(A-Err)\sqrt{4AE-CC}$$

und die surdische Formel wird diese sein

$$= \frac{(A - Err)\sqrt{4AE - CC)(1 + ss)}}{2\sqrt{AE}}$$

und wegen

$$s\sqrt{4AE - CC} = \frac{4AErq + C(A + Err)}{A - Err}$$

wird durch Differenzieren sein

$$ds\sqrt{4AE - CC} = \frac{4AAE(rdq + qdr) - 4AEEr^3dq + 4AEErrqdr + 4ACErdr}{(A - Err)^2}$$

und daher

$$rdq(a - Err) + qdr(A + Err) + Crdr = \frac{ds(A - Err)^2\sqrt{4AE - CC}}{4AE};$$

weil dies das erste Glied unserer Gleichung selbst ist, welchem dieses gleich ist

$$\frac{dr(A - Err)\sqrt{4AE - CC)(1 + ss)}}{2\sqrt{AE}},$$

werden wir haben

$$\frac{ds(a - Err)}{2\sqrt{AE}} = dr\sqrt{1 + ss} \quad \text{und} \quad \frac{2dr\sqrt{AE}}{A - Err} = \frac{ds}{\sqrt{1 + ss}},$$

deren Integral dieses ist

$$s + \sqrt{1 + ss} = \alpha \cdot \frac{\sqrt{A} + r\sqrt{E}}{\sqrt{A} - r\sqrt{E}},$$

woher wird

$$1 = \alpha\alpha\left(\frac{\sqrt{A} + r\sqrt{E}}{\sqrt{A} - r\sqrt{E}}\right)^2 - 2\alpha s \cdot \frac{\sqrt{A} + r\sqrt{E}}{\sqrt{A} - r\sqrt{E}}.$$

Es ist aber

$$s = \frac{4AEqr + C(A + Err)}{(A - Err)\sqrt{4AE - CC}}$$

sowie

$$r = pp = xy \quad \text{und} \quad q = \frac{xx+yy}{2xy}$$

und daher

$$s = \frac{2AE(xx+yy) + C(A+Exxyy)}{(A-Exxyy)\sqrt{4AE-CC}}.$$

§19 Dasselbe können wir ohne eine neue Substitutionen erledigen; denn in dem Moment, in der wird zu dieser Gleichung gelangt sind

$$\begin{aligned} &rdq(A-Err) + qdr(A+Err) + Crdr \\ = dr&\sqrt{\frac{(4AErq + C(A+Err)^2 + (4AE-CC)(A-Err)^2}{4AE}}, \end{aligned}$$

sei es angemerkt, dass das erste Glied dann dieses ist

$$= \frac{(A-Err)^2}{4AE} d. \frac{4AErq + C(A+Err)}{A-Err},$$

das zweite hingegen so ausgedrückt werden kann

$$\frac{dr(A-Err)}{2\sqrt{AE}}\sqrt{4AE - CC + \left(\frac{4AErq + C(A+Err)}{A-Err}\right)^2};$$

daher wird, nachdem der Kürze wegen

$$\frac{4AErq + C(A+Err)}{A-Err} = v$$

gesetzt worden ist, sein

$$\frac{(A-Err)^2}{4AE} dr = \frac{dr(A-Err)}{2\sqrt{AE}}\sqrt{4AE-CC+vv}$$

und daher

$$\frac{dv}{\sqrt{4AE-CC+vv}} = \frac{2dr\sqrt{AE}}{A-Err}.$$

§20 Im Begriff ein anderes Beispiel dieser Reduktion zu geben, werde ich diese Gleichung betrachten

$$\frac{dx}{\sqrt{Bx+Cxx+Dx^3}} = \frac{dy}{\sqrt{By+Cyy+Dy^3}},$$

welche ich so darstelle

$$\frac{ydx}{xdy} = \sqrt{\frac{Bxyy+Cxxyy+Dx^3yy}{Bxxy+Cxxyy+Dxxy^3}} = \sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}},$$

dass ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{Bxy(y+x)+2Cxxyy+Dxxyy(x+y)}{Bxy(y-x)+Dxxyy(x-y)}$$

oder

$$\frac{P}{Q} = \frac{(B+Dxy)(x+y)+2Cxy}{(B-Dxy)(y-x)},$$

und es wird sein

$$\frac{yxd-xdy}{ydx+xdy} = \frac{P+\sqrt{PP-QQ}}{Q}.$$

§21 Es werde nun festgelegt

$$x = (u+\sqrt{uu-1}) \quad \text{und} \quad y = p(u-\sqrt{uu-1});$$

es wird sein

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} + \frac{du}{\sqrt{uu-1}} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} - \frac{du}{\sqrt{uu-1}}$$

und daher

$$\frac{ydx-xdy}{ydx+xdy} = \frac{pdu}{dp\sqrt{uu-1}}.$$

Des Weiteren wird wegen

$$xy = pp \quad \text{und} \quad x+y = 2pu, \quad y-x = -2p\sqrt{uu-1}$$

sein

$$\frac{P}{Q} = \frac{(B+Dpp)u+Cp}{-(B-Dpp)\sqrt{uu-1}}$$

und daher

$$\frac{pdu}{dp} = \frac{(B+Dpp)u+Cp-\sqrt{4BDppuu+2Cpu(B+Dpp)+CCpp+(B-Dpp)^2}}{Dpp-B},$$

woher wird

$$udp(B+Dpp)-pdu(Dpp-B)+Cpdp = dp\sqrt{\ldots}.$$

Das erste Glied ist nämlich

$$(B-Dpp)^2 d.\frac{pu+\frac{C}{4BD}(B+Dpp)}{B-Dpp}$$

oder

$$\frac{(B-Dpp)^2}{4BD}d.\frac{4BDpu+C(B+Dpp)}{B-Dpp},$$

aber die Größe unter der Wurzel kann so geschrieben werden

$$\frac{1}{4BD}(16BBDDppuu+(BCDpu(B+Dpp)+4BCCDpp+4BD(B-Dpp)^2)$$
$$= \frac{1}{4BD}((4BDpu+C(B+Dpp))^2+(4BD-CC)(B-Dpp)^2),$$

woher das irrationale Glied sein wird

$$\frac{B-Dpp}{2\sqrt{BD}}\sqrt{4BD-CC+\left(\frac{4BDpu+C(B+Dpp)}{B-Dpp}\right)}.$$

Daher wird, nachdem der Kürze wegen

$$\frac{4BDpu+C(B+Dpp)}{B-Dpp} = s$$

gesetzt worden ist, sein

$$\frac{(B-Dpp)^2}{4BD}ds = \frac{(B-Dpp)dp}{2\sqrt{BD}}\sqrt{4BD-CC+ss},$$

woher wird

$$\frac{ds}{\sqrt{4BD-CC+ss}} = \frac{2dp\sqrt{BD}}{B-Dpp}$$

und durch Integrieren

$$s+\sqrt{4BD-CC+ss} = \alpha\cdot\frac{\sqrt{B}+p\sqrt{D}}{\sqrt{B}-p\sqrt{D}}$$

und daher

$$4BD-CC = \alpha\alpha\left(\frac{\sqrt{B}+p\sqrt{D}}{\sqrt{B}-p\sqrt{D}}\right)^2 - 2\alpha s\cdot\frac{\sqrt{B}+p\sqrt{D}}{\sqrt{B}-p\sqrt{D}}.$$

§22 Das Fundament dieser Reduktion besteht also darin, dass zuerst $x = pq$ und $y = \frac{p}{q}$ gesetzt wird, dann aber für q eine Formel solcher Art angenommen wird, mit welcher die Teile $x \pm y$, $xx \pm yy$ etc., die in der Formel $\frac{P}{Q}$ enthalten sind, möglichst einfach gemacht werden. Wie wir beispielsweise § 17

$$q = \frac{\sqrt{u+1}2}{+}\sqrt{\frac{u-1}{2}}$$

oder $qq = u+\sqrt{uu-1}$, im letzten hingegen $q = u+\sqrt{uu-1}$ angenommen haben; dort war es nämlich nicht nötig gewesen, dass $x+y$ rational ausgedrückt wird, woher es ausreichte, qq die Form $u+\sqrt{uu-1}$ zuzuteilen, hier war es hingegen von Nöten, dass $x+y$ einen rationalen Wert annimmt.

§23 Schließlich kann hier nicht den einfacheren Fall auslassen, in welchem diese Gleichung vorgelegt wird

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cxx}} = \frac{dy}{\sqrt{A+Cyy}},$$

welche ich so darstelle

$$\frac{ydx}{xdy} = \sqrt{\frac{Ayy+Cxxyy}{Axx+Cxxyy}} = \sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}},$$

also wird nach Setzen von

$$x = p\left(\sqrt{\frac{q+1}{2}} - \sqrt{\frac{q-1}{2}}\right) \quad \text{und} \quad y = p\left(\sqrt{\frac{q+1}{2}} + \sqrt{\frac{q-1}{2}}\right)$$

werden

$$\frac{-pdq}{2dp\sqrt{qq-1}} = \frac{P - \sqrt{PP-QQ}}{Q},$$

wobei ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{Aq + Cpp}{A\sqrt{qq-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{PP-QQ}}{Q} = \frac{\sqrt{2ACppq + CCp^4 + AA}}{A\sqrt{qq-1}},$$

woher nach Nehmen von $pp = r = xy$ sein wird

$$0 = \frac{rdq}{dr} + \frac{Aq + Cr - \sqrt{2ACppq + CCp^4 + AA}}{A}$$

und daher

$$\frac{A(rdq + qdr) + Crdr}{\sqrt{2ACrq + CCrr + AA}} = dr,$$

deren Integral dieses ist

$$Cr + F = \sqrt{2ACrq + CCrr + AA} \quad \text{oder} \quad FF + 2CFr = 2ACrq + AA;$$

es ist aber

$$r = xy \quad \text{und} \quad q = \frac{xx+yy}{2xy},$$

woher die Integralgleichung diese ist

$$FF + 2CFxy = AA + AC(xx+yy).$$

Und so ist dieser Vergleich zwischen x und y, der ansonsten durch Logarithmen oder Kreisbogen gezeigt zu werden pflegt, hier algebraisch gefunden worden.